第2章 2 「逆ラプラス変換」 第2回

解答

1. (1) $2t+\dfrac{t^3}{6}$ (2) t^2e^{-t} (3) $\sin 3t$ (4) $e^t\cos 2t$

2. (1) $(1+4t)e^{2t}$ (2) $(3-2t)e^{-t}-e^{-2t}$

解説

1. (1) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right]=t^n$ より $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{1}{s^4}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s^2}\right]+\dfrac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3!}{s^4}\right]=2t+\dfrac{t^3}{6}$

(2) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}\right]=t^ne^{\alpha t}$ より $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{(s+1)^3}\right]=t^2e^{-t}$

(3) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]=\sin\omega t$ より $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{s^2+9}\right]=\sin 3t$

(4) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right]=e^{\alpha t}\cos\beta t$ より $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s-1}{(s-1)^2+4}\right]=e^t\cos 2t$

2. (1) $\dfrac{s+2}{(s-2)^2}=\dfrac{A}{s-2}+\dfrac{B}{(s-2)^2}$ と部分分数に分解する.

両辺に $(s-2)^2$ を掛けると $s+2=A(s-2)+B$

右辺を整理すると $s+2=As+(-2A+B)$

これが恒等式になればよいから，係数を比較して $A=1,\ -2A+B=2$

これを解いて $A=1,\ B=4$ $\therefore\ \dfrac{s+2}{(s-2)^2}=\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{4}{(s-2)^2}$

したがって $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s+2}{(s-2)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{4}{(s-2)^2}\right]=e^{2t}+4te^{2t}=(1+4t)e^{2t}$

(2) $\dfrac{2s^2+5s+1}{(s+1)^2(s+2)}=\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{(s+1)^2}+\dfrac{C}{s+2}$ と部分分数に分解する.

両辺に $(s+1)^2(s+2)$ を掛けると $2s^2+5s+1=A(s+1)(s+2)+B(s+2)+C(s+1)^2$

右辺を整理すると $2s^2+5s+1=(A+C)s^2+(3A+B+2C)s+(2A+2B+C)$

これが恒等式になればよいから，係数を比較して $A+C=2,\ 3A+B+2C=5,\ 2A+2B+C=1$

これを解いて $A=3,\ B=-2,\ C=-1$ $\therefore\ \dfrac{2s^2+5s+1}{(s+1)^2(s+2)}=\dfrac{3}{s+1}+\dfrac{-2}{(s+1)^2}+\dfrac{-1}{s+2}$

したがって $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2s^2+5s+1}{(s+1)^2(s+2)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{s+1}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{-2}{(s+1)^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{-1}{s+2}\right]$

$$=3e^{-t}-2te^{-t}-e^{-2t}=(3-2t)e^{-t}-e^{-2t}$$