

## 第2章 2 「逆ラプラス変換」 第1回

### 解答

1. (1)  $1+t$                       (2)  $t^3e^t$                       (3)  $3\cos 3t$                       (4)  $e^{-t}\sin 2t$
2. (1)  $-2e^t + 3e^{3t}$                       (2)  $-1 + \cos 2t + 2\sin 2t$

### 解説

1. (1)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right] = t^n$  より  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = 1+t$
- (2)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}\right] = t^n e^{\alpha t}$  より  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{(s-1)^4}\right] = t^3 e^t$
- (3)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \cos \omega t$  より  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s}{s^2+9}\right] = 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right] = 3\cos 3t$
- (4)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right] = e^{\alpha t} \sin \beta t$  より  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+4}\right] = e^{-t} \sin 2t$
2. (1)  $\frac{s+3}{(s-1)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3}$  と部分分数に分解する.  
 両辺に  $(s-1)(s-3)$  を掛けると  $s+3 = A(s-3) + B(s-1)$   
 右辺を整理すると  $s+3 = (A+B)s + (-3A-B)$   
 これが恒等式になればよいから、係数を比較して  $A+B=1, -3A-B=3$   
 これを解いて  $A=-2, B=3$        $\therefore \frac{1}{(s-1)(s-3)} = \frac{-2}{s-1} + \frac{3}{s-3}$   
 したがって  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s-1)(s-3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{s-1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s-3}\right] = -2e^t + 3e^{3t}$
- (2)  $\frac{4s-4}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$  と部分分数に分解する.  
 両辺に  $s(s^2+4)$  を掛けると  $4s-4 = A(s^2+4) + (Bs+C)s$   
 右辺を整理すると  $4s-4 = (A+B)s^2 + Cs + 4A$   
 これが恒等式になればよいから、係数を比較して  $A+B=0, C=4, 4A=-4$   
 これを解いて  $A=-1, B=1, C=4$        $\therefore \frac{4s-4}{s(s^2+4)} = \frac{-1}{s} + \frac{s+4}{s^2+4}$   
 したがって  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s-4}{s(s^2+4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+4}\right]$   
 $= -1 + \cos 2t + 2\sin 2t$