第２章 １「ラプラス変換」 第２回

解答

1. $\dfrac{1+s}{s^2} \quad (s>0)$

2. (1) $\dfrac{8+4s+s^2}{s^3}$ (2) $\dfrac{2s^2-16s+34}{(s-4)^3}$ (3) $\dfrac{2s}{s^2+16}$ (4) $\dfrac{2}{(s-1)^2+4}$ (5) $\dfrac{4s}{(s^2+4)^2}$

(6) $\dfrac{2s}{s^2-1}$ (7) $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$ (8) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{s^2+1}{s^2}$ (9) $\dfrac{2}{s^2(s^2+1)}$

3. (1) $f(t)=U(t-2),\ \mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{e^{-2s}}{s}$ (2) $f(t)=U(t-2)-U(t-3),\ \mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{e^{-2s}-e^{-3s}}{s}$

解説

1. $F(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}(t+1)\,dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}(t+1)\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\lim_{t\to\infty}e^{-st}(t+1)-\frac{1}{s}\left[\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty$

$=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s}\displaystyle\lim_{t\to\infty}e^{-st}(t+1)+\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s^2}\lim_{t\to\infty}e^{-st}$

$s>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}e^{-st}(t+1)=0$（ロピタルの定理），$\displaystyle\lim_{t\to\infty}e^{-st}=0$ だから $F(s)=\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s^2}=\dfrac{1+s}{s^2}$

$s\leqq 0$ のとき，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}(t+1)\,dt$ は存在しない．したがって，$\mathcal{L}[t+1]=\dfrac{1+s}{s^2} \quad (s>0)$

2. (1) $\mathcal{L}[(2t+1)^2]=\mathcal{L}[4t^2+4t+1]=4\mathcal{L}[t^2]+4\mathcal{L}[t]+\mathcal{L}[1]=\dfrac{8}{s^3}+\dfrac{4}{s^2}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{8+4s+s^2}{s^3}$

(2) $\mathcal{L}[(t^2+2)e^{4t}]=\mathcal{L}[t^2e^{4t}+2e^{4t}]=\mathcal{L}[t^2e^{4t}]+2\mathcal{L}[e^{4t}]=\dfrac{2}{(s-4)^3}+\dfrac{2}{s-4}=\dfrac{2s^2-16s+34}{(s-4)^3}$

(3) $\mathcal{L}[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ より $\mathcal{L}[2\cos 4t]=2\mathcal{L}[\cos 4t]=2\cdot\dfrac{s}{s^2+4^2}=\dfrac{2s}{s^2+16}$

(4) $\mathcal{L}[e^{\alpha t}\sin\beta t]=\dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$ より $\mathcal{L}[e^t\sin 2t]=\dfrac{2}{(s-1)^2+4}$

(5) $\mathcal{L}[t\sin\omega t]=\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$ より $\mathcal{L}[t\sin 2t]=\dfrac{4s}{(s^2+2^2)^2}=\dfrac{4s}{(s^2+4)^2}$

(6) $\mathcal{L}[\cosh\omega t]=\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$ より $\mathcal{L}[2\cosh t]=2\mathcal{L}[\cosh t]=2\cdot\dfrac{s}{s^2-1^2}=\dfrac{2s}{s^2-1}$

(7) $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t f(\tau)\ d\tau\right]=\dfrac{1}{s}F(s)$ より $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t \sin\tau\,d\tau\right]=\dfrac{1}{s}\,\dfrac{1}{s^2+1}=\dfrac{1}{s(s^2+1)}$

(8) $\mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right]=\displaystyle\int_s^\infty F(\sigma)\ d\sigma$ より $\mathcal{L}\left[\dfrac{1-\cos t}{t}\right]=\displaystyle\int_s^\infty\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{\sigma}{\sigma^2+1}\right)\ d\sigma=\left[\log\sigma-\frac{1}{2}\log(\sigma^2+1)\right]_s^\infty$

$=\left[\log\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+1}}\,\right]_s^\infty=-\log\sqrt{\dfrac{s^2}{s^2+1}}=\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{s^2+1}{s^2}\right)$

(9) $\mathcal{L}[f(t)*g(t)]=\mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)]$ より $\mathcal{L}[t^2*\cos t]=\mathcal{L}[t^2]\mathcal{L}[\cos t]=\dfrac{2}{s^3}\,\dfrac{s}{s^2+1}=\dfrac{2}{s^2(s^2+1)}$

3. $\mathcal{L}[U(t-a)]=\dfrac{e^{-as}}{s} \quad (a\geqq 0)$ である．

(1) $\mathcal{L}[U(t-2)]=\dfrac{e^{-2s}}{s}$

(2) $\mathcal{L}[U(t-2)-U(t-3)]=\mathcal{L}[U(t-2)]-\mathcal{L}[U(t-3)]=\dfrac{e^{-2s}}{s}-\dfrac{e^{-3s}}{s}=\dfrac{e^{-2s}-e^{-3s}}{s}$