第２章 １ 「ラプラス変換」 第１回

解答

1. $\dfrac{1}{s+3}\quad(s>-3)$

2. (1) $\dfrac{3+2s}{s^2}$　(2) $\dfrac{s-4}{(s-5)^2}$　(3) $\dfrac{6}{s^2+4}$　(4) $\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}$　(5) $\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

(6) $\dfrac{3}{s^2-9}$　(7) $\dfrac{1}{s^2+1}$　(8) $\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}s$　(9) $\dfrac{1}{s^2(s-2)}$

3. (1) $f(t)=U(t-1),\ \mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{e^{-s}}{s}$　(2) $f(t)=U(t-1)-U(t-2),\ \mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}$

解説

1. $F(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}e^{-3t}\,dt=\int_0^\infty e^{-(s+3)t}\,dt=\left[-\frac{1}{s+3}e^{-(s+3)t}\right]_0^\infty=\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+3}\lim_{t\to\infty}e^{-(s+3)t}$

$s+3>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}e^{-(s+3)t}=0$ だから $F(s)=\dfrac{1}{s+3}$

$s+3\leqq 0$ のとき，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-(s+3)t}\,dt$ は存在しない．したがって，$\mathcal{L}[e^{-3t}]=\dfrac{1}{s+3}\quad(s>-3)$

2. (1) $\mathcal{L}[3t+2]=3\mathcal{L}[t]+2\mathcal{L}[1]=\dfrac{3}{s^2}+\dfrac{2}{s}=\dfrac{3+2s}{s^2}$

(2) $\mathcal{L}[(t+1)e^{5t}]=\mathcal{L}[te^{5t}+e^{5t}]=\mathcal{L}[te^{5t}]+\mathcal{L}[e^{5t}]=\dfrac{1}{(s-5)^2}+\dfrac{1}{s-5}=\dfrac{s-4}{(s-5)^2}$

(3) $\mathcal{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ より $\mathcal{L}[3\sin 2t]=3\mathcal{L}[\sin 2t]=3\cdot\dfrac{2}{s^2+2^2}=\dfrac{6}{s^2+4}$

(4) $\mathcal{L}[e^{\alpha t}\cos\beta t]=\dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$ より $\mathcal{L}[e^{-t}\cos 2t]=\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}$

(5) $\mathcal{L}[t\cos\omega t]=\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ より $\mathcal{L}[t\cos t]=\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

(6) $\mathcal{L}[\sinh\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$ より $\mathcal{L}[\sinh 3t]=\dfrac{3}{s^2-3^2}=\dfrac{3}{s^2-9}$

(7) $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right]=\dfrac{1}{s}F(s)$ より $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t\cos\tau\,d\tau\right]=\dfrac{1}{s}\,\dfrac{s}{s^2+1}=\dfrac{1}{s^2+1}$

(8) $\mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right]=\displaystyle\int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma$ より $\mathcal{L}\left[\dfrac{\sin t}{t}\right]=\displaystyle\int_s^\infty\frac{1}{\sigma^2+1}\,d\sigma=\Big[\tan^{-1}\sigma\Big]_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s$

(9) $\mathcal{L}[f(t)*g(t)]=\mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)]$ より $\mathcal{L}[t*e^{2t}]=\mathcal{L}[t]\mathcal{L}[e^{2t}]=\dfrac{1}{s^2}\,\dfrac{1}{s-2}=\dfrac{1}{s^2(s-2)}$

3. $\mathcal{L}[U(t-a)]=\dfrac{e^{-as}}{s}\quad(a\geqq 0)$ である．

(1) $\mathcal{L}[U(t-1)]=\dfrac{e^{-s}}{s}$

(2) $\mathcal{L}[U(t-1)-U(t-2)]=\mathcal{L}[U(t-1)]-\mathcal{L}[U(t-2)]=\dfrac{e^{-s}}{s}-\dfrac{e^{-2s}}{s}=\dfrac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}$