第１章 6 「ガウスの発散定理」 第３回

解答

1. 42

2. 24

3. 144π

4. $\dfrac{5}{3}\pi$

解説

1. ガウスの発散定理より

$$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV$$

ここで

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x+2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(zx^3)$$
$$= y + 2z + x^3$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV \\
&= \int_V (y+2z+x^3)\,dV \\
&= \int_0^1 \left\{\int_0^2 \left(\int_0^4 (y+2z+x^3)\,dz\right) dy\right\} dx \\
&= \int_0^1 \left\{\int_0^2 \Big[\,yz+z^2+x^3z\,\Big]_0^4 dy\right\} dx \\
&= \int_0^1 \left\{\int_0^2 \left(4y+16+4x^3\right) dy\right\} dx \\
&= 4\int_0^1 \left\{\int_0^2 \left(x^3+y+4\right) dy\right\} dx \\
&= 4\int_0^1 \Big[\,x^3y+\frac{y^2}{2}+4y\,\Big]_0^2 dx \\
&= 4\int_0^1 \left(2x^3+10\right) dx \\
&= 4\Big[\,\frac{x^4}{2}+10x\,\Big]_0^1 \\
&= 42
\end{aligned}$$

2. ガウスの発散定理より

$$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\boldsymbol{a} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(2x-3xyz)+\frac{\partial}{\partial y}(4y+y^2z)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}yz^2\right) \\
&= (2-3yz)+(4+2yz)+(yz) \\
&= 6
\end{aligned}$$

したがって

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV = \int_V 6\,dV$$
$$= 6\times(V\text{ の体積})$$
$$= 6\times 4$$

$(\because V$ の体積は三角錐の体積$)$

$$= 24$$

3. ガウスの発散定理より

$$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV$$

ここで

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+4x)+\frac{\partial}{\partial y}(-2xy+4yz)+\frac{\partial}{\partial z}(-2z^2)$$
$$= (2x+4)+(-2x+4z)+(-4z) = 4$$

したがって

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV = \int_V 4\,dV$$
$$= 4\times(V\text{ の体積})$$
$$= 4\times\left(\frac{4}{3}\pi\times 3^3\right)$$

$(\because V$ の体積は半径 3 の球の体積$)$

$$= 144\pi$$

4. ガウスの発散定理より

$$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV$$

ここで

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x}(3x)+\frac{\partial}{\partial y}(2y)+\frac{\partial}{\partial z}(y+5z)$$
$$= 3+2+5 = 10$$

したがって

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV = \int_V 10\,dV$$
$$= 10\times(V\text{ の体積})$$
$$= 10\times\left(\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{8}\right)$$

$(\because V$ の体積は半径 1 の球の体積の $\dfrac{1}{8}$ $)$

$$= \frac{5}{3}\pi$$