第１章 6 「ガウスの発散定理」 第２回

解答

1. 72

2. 2

3. 32π

解説

1. ガウスの発散定理より

$$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV$$

ここで

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x}(4x+3z) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy) + \frac{\partial}{\partial z}(2z^2)$$

$$= 4+2x+4z$$

したがって

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV$$

$$= \int_V (4+2x+4z)\,dV$$

$$= \int_0^2 \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^3 (4+2x+4z)\,dz \right) dy \right\} dx$$

$$= \int_0^2 \left\{ \int_0^1 \Big[\, 4z+2xz+2z^2 \,\Big]_0^3 dy \right\} dx$$

$$= \int_0^2 \left\{ \int_0^1 (30+6x)\ dy \right\} dx$$

$$= \int_0^2 \Big[\, 30y+6xy \,\Big]_0^1 dx$$

$$= \int_0^2 (\,30+6x\,)\,dx$$

$$= \Big[\, 30x+3x^2 \,\Big]_0^2 = 60+12$$

$$= 72$$

2. ガウスの発散定理より

$$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV$$

ここで

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2x-4xy) + \frac{\partial}{\partial y}(2y-3y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(10yz)$$

$$= (2-4y)+(2-6y)+(10y)$$

$$= 4$$

したがって

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV = \int_V 4\,dV$$

$$= 4\times(V \text{ の体積})$$

$$= 4\times\frac{1}{2}$$

$(\because\ V$ の体積は三角錐の体積$)$

$$= 2$$

3. ガウスの発散定理より

$$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV$$

ここで

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x}(x-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x+y) + \frac{\partial}{\partial z}(z)$$

$$= 1+1+1 = 3$$

したがって

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV = \int_V 3\,dV$$

$$= 3\times(V \text{ の体積})$$

$$= 3\times\left(\frac{4}{3}\pi\times 2^3\right)$$

$(\because\ V$ の体積は半径 2 の球の体積$)$

$$= 32\pi$$