第１章 6 「ガウスの発散定理」 第１回

解答

1. 14

2. 2

解説

1. ガウスの発散定理より

$$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV$$

ここで

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x}(xz^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2x+3y) + \frac{\partial}{\partial z}(4yz) = z^3+3+4y$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV \\
&= \int_V (z^3+3+4y)\,dV \\
&= \int_0^1 \left\{\int_0^1 \left(\int_0^2 (z^3+3+4y)\,dz\right)\,dy\right\}\,dx \\
&= \int_0^1 \left\{\int_0^1 \Big[\frac{z^4}{4}+3z+4yz\Big]_0^2 dy\right\}\,dx \\
&= \int_0^1 \left\{\int_0^1 (8y+10)\,\,dy\right\}\,dx \\
&= \int_0^1 \Big[4y^2+10y\Big]_0^1 dx \\
&= \int_0^1 14\,dx \\
&= 14
\end{aligned}$$

2. ガウスの発散定理より

$$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV$$

ここで

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{a} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x-4xz) + \frac{\partial}{\partial y}(3y-4yz) + \frac{\partial}{\partial z}(4z^2+x^2y^2) \\
&= (3-4z)+(3-4z)+(8z) \\
&= 6
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV &= \int_V 6\,dV \\
&= 6\times(V\text{ の体積}) \\
&= 6\times\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

($\because$ V の体積は三角錐の体積)

$$= 2$$