

第1章 5 「グリーンの定理」「ストークスの定理」 第3回

解答

1. $\frac{1}{12}$
2. $\frac{17}{15}$
3. 8

解説

1. C の向きは、領域 D を左側に見ながら1周する向きとする。グリーンの定理より

$$\begin{aligned} & \int_C \{(xy+1)dx + (x^2+y^2)dy\} \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy+1)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D (2x-x) dx dy \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^x x dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 x [y]_{x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 x(x-x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

2. C の向きは、領域 D を左側に見ながら1周する向きとする。グリーンの定理より

$$\begin{aligned} & \int_C \{(x^2-2xy)dx + (x^2y+3)dy\} \\ &= \iint_D \left\{ \frac{\partial(x^2y+3)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2-2xy)}{\partial y} \right\} dx dy \\ &= \iint_D (2xy+2x) dx dy \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{x}} 2x(y+1) dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 2x \left[\frac{1}{2}y^2 + y \right]_0^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 2x \left(\frac{x}{2} + \sqrt{x} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 + 2x^{\frac{3}{2}} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \\ &= \frac{17}{15} \end{aligned}$$

3. C で囲まれた領域を S とし、 S の単位法線ベクトルを \mathbf{n} と表すと \mathbf{n} は $(0, 0, 1)$ である。また、 C によって囲まれた xy 平面上の領域を D で表す(実質的に S と D は同じ図形であるが、以下では図形

の表面 (surface) を意識して S と表し、 xy 平面上の領域 (domain) を意識して D と表記した.)。ストークスの定理より

$$I = \int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$\mathbf{n} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ である

ここで

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-4y & 3y+z^2 & 4xy \end{vmatrix} \\ &= (4x-2z, -4y, 4) \end{aligned}$$

だから

$$(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = (4x-2z, -4y, 4) \cdot \mathbf{k} = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \iint_D 4 dx dy \\ &= 4 \iint_D dx dy \\ &= 4 \times (D \text{ の面積}) \\ (\because D \text{ の面積は三角形の面積}) \\ &= 4 \times 2 = 8 \end{aligned}$$