第１章 5 「グリーンの定理」「ストークスの定理」 第２回

解答

1. $\dfrac{3}{2}$

2. 6π

3. π

4. 4π

解説

1. 正方形の周 C によって囲まれた範囲を D とする．C の向きは，D を左側に見ながら１周する向きとする．グリーンの定理より

$$\begin{aligned}
&\int_C \left\{(2xy+4)\,dx+(3x^2-xy)\,dy\right\}\\
&=\iint_D \left(\frac{\partial(3x^2-xy)}{\partial x}-\frac{\partial(2xy+4)}{\partial y}\right)dx\,dy\\
&=\iint_D (4x-y)\ dx\,dy\\
&=\int_0^1 \left\{\int_0^1 (4x-y)\,dy\right\}\,dx\\
&=\int_0^1 \left[4xy-\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx\\
&=\int_0^1 \left(4x-\frac{1}{2}\right)\,dx\\
&=\left[\,2x^2-\frac{1}{2}x\right]_0^1=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

2. 半径１の円 C によって囲まれた範囲を D とする．C の向きは，D を左側に見ながら１周する向きとする．グリーンの定理より

$$\begin{aligned}
&\int_C \{(x-2y)\,dx+(4x+y)\,dy\}\\
&=\iint_D \left(\frac{\partial(4x+y)}{\partial x}-\frac{\partial(x-2y)}{\partial y}\right)dx\,dy\\
&=\iint_D (4+2)\ dx\,dy\\
&=6\iint_D dx\,dy\\
&=6\times(D\text{ の面積})\\
&=6\cdot\pi
\end{aligned}$$

$(\because\ D$ の面積は半径１の円の面積$)$

$$=6\pi$$

3. C 上で $\boldsymbol{a}=(2\sin t,\ 3\cos t,\ 0)$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(-\sin t,\ \cos t,\ 0)$$

である．

ストークスの定理より

$$\begin{aligned}
&\int_S (\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\,dS\\
&=\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}\\
&=\int_0^{2\pi}\boldsymbol{a}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}(2\sin t,\ 3\cos t,\ 0)\cdot(-\sin t,\ \cos t,\ 0)\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\left(-2\sin^2 t+3\cos^2 t\right)\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\left\{-2(1-\cos^2 t)+3\cos^2 t\right\}dt\\
&=\int_0^{2\pi}(5\cos^2 t-2)\,dt\\
&=\frac{5}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt-2\int_0^{2\pi}\,dt\\
&=\frac{5}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi}-2\Big[\,t\,\Big]_0^{2\pi}=5\pi-4\pi=\pi
\end{aligned}$$

4. C 上で $\boldsymbol{a}=(-2\sin t,\ \sin t,\ 4\sin t\cos t)$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)$$

である．

ストークスの定理より

$$\begin{aligned}
&\int_S (\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\,dS\\
&=\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}\\
&=\int_0^{2\pi}\boldsymbol{a}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}(-2\sin t,\ \sin t,\ 4\sin t\cos t)\cdot(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\left(4\sin^2 t+2\sin t\cos t\right)\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\left(4\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}+\sin 2t\right)\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}(2-2\cos 2t+\sin 2t)\,dt\\
&=\left[2t-\sin 2t-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{2\pi}=4\pi
\end{aligned}$$