第１章 5 「グリーンの定理」「ストークスの定理」 第１回

解答

1. 2

2. 4π

解説

1. 三角形の周 C によって囲まれた範囲を D とする．C の向きは，D を左側に見ながら１周する向きとする．
グリーンの定理より

$$\begin{aligned}
&\int_C \left\{(-4xy-5y^2+x)\,dx+(-4x^2+6xy+3)\,dy\right\}\\
&=\iint_D \left(\frac{\partial(-4x^2+6xy+3)}{\partial x}-\frac{\partial(-4xy-5y^2+x)}{\partial y}\right)dx\,dy\\
&=\iint_D (-4x+16y)\ dx\,dy\\
&=\int_0^1 \left\{\int_0^{-x+1}(-4x+16y)\,dy\right\}\,dx\\
&=\int_0^1 \Big[-4xy+8y^2\Big]_0^{-x+1}\,dx\\
&=\int_0^1 \left\{-4x(-x+1)+8(-x+1)^2\right\}\,dx\\
&=4\int_0^1 \left(3x^2-5x+2\right)\,dx\\
&=4\Big[x^3-\frac{5}{2}x^2+2x\Big]_0^1=2
\end{aligned}$$

2. C 上で $\boldsymbol{a}=(-2\sin t,\ 4\cos^2 t,\ 0)$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)$$

である．
ストークスの定理より

$$\begin{aligned}
&\int_S(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\,dS\\
&=\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}\\
&=\int_0^{2\pi}\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}(-2\sin t,\ 4\cos^2 t,\ 0)\cdot(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\left(4\sin^2 t+8\cos^3 t\right)\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\Big(4\sin^2 t+8\cos t(1-\sin^2 t)\Big)\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\left(4\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}+8\cos t-8\cos t\sin^2 t\right)dt\\
&=2\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\,dt+8\int_0^{2\pi}\cos t\,dt-8\int_0^{2\pi}\cos t\sin^2 t\,dt\\
&=2\Big[t-\frac{1}{2}\sin 2t\Big]_0^{2\pi}+8\Big[\sin t\Big]_0^{2\pi}-8\Big[\frac{1}{3}\sin^3 t\Big]_0^{2\pi}\\
&=4\pi
\end{aligned}$$