第１章 3 「勾配」「発散」「回転」 第３回

解答

1. (1) $\nabla\varphi=(y^2,\ 2xy,\ 8z)$

$(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}=(4,\ -4,\ 8)$

(2) 4

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,\ -1,\ 2)$

2. (1) 発散 $z^2-4z+12zy$，回転 $(6z^2+4y, 2xz,\ 0)$

(2) 発散 $2e^{2x}+2xy+e^z$，回転 $(0,\ 0,\ y^2)$

3. (1) $8x+2y-4z$

(2) $(8,\ 2,\ -4)$

(3) $(0,\ 0,\ 0)$

4. $\nabla^2\varphi=2xz(x^2+3y^2)$

解説

1. (1) $\nabla\varphi=\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y},\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$

$=(y^2,\ 2xy,\ 8z)$

$\nabla\varphi$ に点 P の座標値を代入して

$(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}=(4,\ -4,\ 8)$

(2) $(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(4,\ -4,\ 8)\cdot\dfrac{1}{3}(1,\ 2,\ 2)$

$=\dfrac{4}{3}-\dfrac{8}{3}+\dfrac{16}{3}=\dfrac{12}{3}=4$

(3) $(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}\cdot\boldsymbol{n}$ が最大となる単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは $(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}$ と同じだから，$(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}$ をその大きさ $|(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}|$ で割ることで単位ベクトルにすればよい．

$|(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}|=4\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=4\sqrt{6}$ より

$\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{|(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}|}(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}$

$=\dfrac{1}{4\sqrt{6}}(4,\ -4,\ 8)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,\ -1,\ 2)$

2. (1) $\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{\partial}{\partial x}(xz^2)+\dfrac{\partial}{\partial y}(-4yz)+\dfrac{\partial}{\partial z}(6yz^2)$

$=z^2-4z+12yz$

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xz^2 & -4yz & 6yz^2\end{vmatrix}$$

$=(6z^2+4y,\ 2xz,\ 0)$

(2) $\nabla\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{\partial}{\partial x}(e^{2x})+\dfrac{\partial}{\partial y}(xy^2)+\dfrac{\partial}{\partial z}(e^z)$

$=2e^{2x}+2xy+e^z$

$$\nabla\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ e^{2x} & xy^2 & e^z\end{vmatrix}$$

$=(0,\ 0,\ y^2)$

3. (1) $\nabla\varphi=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)(x^2y-2y^2z+4z^2x)$

$=(2xy+4z^2,\ x^2-4yz,\ -2y^2+8zx)$

$\therefore\nabla\cdot(\nabla\varphi)$

$=\dfrac{\partial}{\partial x}(2xy+4z^2)+\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2-4yz)+\dfrac{\partial}{\partial z}(-2y^2+8zx)$

$=2y-4z+8x=8x+2y-4z$

(2) $\nabla\Big(\nabla\cdot(\nabla\varphi)\Big)$

$=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)(8x+2y-4z)$

$=(8,\ 2,\ -4)$

(3) $\nabla\times(\nabla\varphi)=(0,\ 0,\ 0)$ である．

もしくは 詳細に計算すると次のようになる．

(1) より

$\nabla\varphi=(2xy+4z^2,\ x^2-4yz,\ -2y^2+8zx)$ だから

$\nabla\times(\nabla\varphi)$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+4z^2 & x^2-4yz & -2y^2+8zx\end{vmatrix}$$

$=(-4y+4y,\ 8z-8z,\ 2x-2x)=(0,\ 0,\ 0)$

4. $\varphi_x=3x^2y^2z-4yz$

$\varphi_y=2x^3yz-4xz$

$\varphi_z=x^3y^2-4xy$

$\varphi_{xx}=6xy^2z$

$\varphi_{yy}=2x^3z$

$\varphi_{zz}=0$

したがって，φ のラプラシアンは

$\nabla^2\varphi(=\nabla\cdot\nabla\varphi)=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

$=(6xy^2z)+(2x^3z)+0$

$=2xz(x^2+3y^2)$