第１章 １ 「外積」「ベクトル関数」 第３回

解答

1. $(2,\ 2,\ 1)$，$\pm\dfrac{1}{3}(2, 2, 1)$

2. 垂直な単位ベクトル $\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,\ 0,\ -1)$，△ABC の面積 $\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$

3. (1) $(-4,\ -3,\ -4)$ (2) -5

4. (1) $(-6\sin t,\ 0,\ 6\cos t)$，$(-3\sqrt{3},\ 0,\ 3)$ (2) $(3,\ -2\sin t,\ 2\cos t)$，$(3,\ -2,\ 0)$

5. (1) t^5 (2) $5t^4$ (3) $(24t^5,\ -7t^6-5t^4+4t^3,\ -20t^4)$

解説

1. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\Big((-2)\cdot(-2)-2\cdot1,\ 2\cdot0-1\cdot(-2),\ 1\cdot1-(-2)\cdot0\Big)=(2,\ 2,\ 1)$

$\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$ より $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ の両方に垂直な単位ベクトルは

$\pm\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right|}=\pm\dfrac{1}{3}(2,\ 2,\ 1)$

2. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 1,\ 4)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ -1,\ 2)$ より

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 1,\ 4)\times(1,\ -1,\ 2)=\Big(1\cdot2-4\cdot(-1),\ 4\cdot1-2\cdot2,\ 2\cdot(-1)-1\cdot1\Big)=(6,\ 0,\ -3)=3(2,\ 0,\ -1)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=3\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}=3\sqrt{5}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直な単位ベクトルは

$\pm\dfrac{3}{3\sqrt{5}}(2,\ 0,\ -1)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,\ 0,\ 1)$ また，△ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$ より，$\dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{5}=\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$

3. (1) $3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(6,\ -3,\ 0)-(1,\ 1,\ 2)=(5,\ -4,\ -2)$

$\boldsymbol{a}\times(3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=(1,\ 0,\ -1)\times(5,\ -4,\ -2)=\Big(0\cdot(-2)-(-1)\cdot(-4),\ (-1)\cdot5-1\cdot(-2),\ 1\cdot(-4)-0\cdot5\Big)$

$=(-4,\ -3,\ -4)$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(1,\ 0,\ -1)\times(2,\ -1,\ 0)=\Big(0\cdot0-(-1)\cdot(-1),\ (-1)\cdot2-1\cdot0,\ 1\cdot(-1)-0\cdot2\Big)=(-1,\ -2,\ -1)$

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-1,\ -2,\ -1)\cdot(1,\ 1,\ 2)=-1-2-2=-5$

4. (1) $\boldsymbol{a}'(t)=(-6\sin t,\ 0,\ 6\cos t)$，$t=\dfrac{\pi}{3}$ を代入して，$\boldsymbol{a}'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=(-3\sqrt{3},\ 0,\ 3)$

(2) $\boldsymbol{b}'(t)=(3,\ -2\sin t,\ 2\cos t)$，$t=\dfrac{\pi}{2}$ を代入して，$\boldsymbol{b}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(3,\ -2\sin\dfrac{\pi}{2},\ 2\cos\dfrac{\pi}{2}\right)=(3,\ -2,\ 0)$

5. $\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}=(2t,\ 4,\ -1)$，$\dfrac{d\boldsymbol{b}}{dt}=(4t^3,\ 0,\ 5t^4)$ より

(1) $\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b}(=\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b})=(2t,\ 4,\ -1)\cdot(t^4,\ 0,\ t^5)=2t^5+0-t^5=t^5$

(2) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}'=t^5+(t^2,\ 4t,\ 1-t)\cdot(4t^3,\ 0,\ 5t^4)=t^5+(4t^5+0+5t^4-5t^5)=5t^4$

(3) $\dfrac{d}{dt}(-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}'$ ここでは $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を t で微分することで $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ を求める．

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(t^2,\ 4t,\ 1-t)\times(t^4,\ 0,\ t^5)=(4t\cdot t^5-(1-t)\cdot0,\ (1-t)\cdot t^4-t^2\cdot t^5,\ t^2\cdot0-4t\cdot t^4)$

$=(4t^6,\ -t^7-t^5+t^4,\ -4t^5)$

$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\dfrac{d}{dt}(4t^6,\ -t^7-t^5+t^4,\ -4t^5)=(24t^5,\ -7t^6-5t^4+4t^3,\ -20t^4)$