第１章 １ 「外積」「ベクトル関数」 第２回

解答

1. $(-9,\ 3,\ 0)$, $\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3,\ 1,\ 0)$

2. 垂直な単位ベクトル $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ -1)$, $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 $3\sqrt{3}$

3. (1) $(-6,\ 6,\ 18)$ (2) -30

4. (1) $\left(15t^4,\ \dfrac{1}{\sqrt{2t}},\ \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$, $\left(15,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right)$ (2) $\left(\cos t,\ -2e^{-2t},\ 0\right)$, $(1,\ -2,\ 0)$

5. (1) $16t^3+58t+30$ (2) $24t^2-5$ (3) $(34t+9,\ 8t^3-12t,\ -15t^2-6t-2)$

解説

1. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\Big(6\cdot(-1)-1\cdot 3,\ 1\cdot 1-2\cdot(-1),\ 2\cdot 3-6\cdot 1\Big)=(-9,\ 3,\ 0)=3(-3,\ 1,\ 0)$

$\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right|=3\sqrt{(-3)^2+1^2+0^2}=3\sqrt{10}$ より，$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ の両方に垂直な単位ベクトルは

$\pm\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\pm\dfrac{3}{3\sqrt{10}}(-3,\ 1,\ 0)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3,\ 1,\ 0)$

2. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 2,\ 4)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ -1,\ 1)$ より

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 2,\ 4)\times(2,\ -1,\ 1)=\Big(2\cdot 1-4\cdot(-1),\ 4\cdot 2-2\cdot 1,\ 2\cdot(-1)-2\cdot 2\Big)=(6,\ 6,\ -6)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=6\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=6\sqrt{3}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直な単位ベクトルは

$\pm\dfrac{6}{6\sqrt{3}}(1,\ 1,\ -1)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ -1)$ また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$ より，$\dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

3. (1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\Big((-1)\cdot 2-(-1)\cdot(-1),\ (-1)\cdot 1-1\cdot 2,\ 1\cdot(-1)-(-1)\cdot 1\Big)=(-3,\ -3,\ 0)$

$2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=2(-3,\ -3,\ 0)=(-6,\ -6,\ 0)$

$\therefore (2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(-6,\ -6,\ 0)\times(4,\ 1,\ 1)=\Big((-6)\cdot 1-0\cdot 1,\ 0\cdot 4-(-6)\cdot 1,\ (-6)\cdot 1-(-6)\cdot 4\Big)=(-6,\ 6,\ 18)$

(2) $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=2\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ である．

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=(1,\ -1,\ 2)\times(4,\ 1,\ 1)=\Big((-1)\cdot 1-2\cdot 1,\ 2\cdot 4-1\cdot 1,\ 1\cdot 1-(-1)\cdot 4\Big)=(-3,\ 7,\ 5)$

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(1,\ -1,\ -1)\cdot(-3,\ 7,\ 5)=1\cdot(-3)+(-1)\cdot 7+(-1)\cdot 5=-3-7-5=-15$

$\therefore 2\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=2\cdot(-15)=-30$

4. (1) $\boldsymbol{a}'(t)=\left(15t^4,\ \dfrac{1}{\sqrt{2t}},\ \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$，$t=1$ を代入して，$\boldsymbol{a}'(1)=\left(15,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right)$

(2) $\boldsymbol{b}'(t)=\left(\cos t,\ -2e^{-2t},\ 0\right)$，$t=0$ を代入して，$\boldsymbol{b}'(0)=\left(\cos 0,\ -2e^{0},\ 0\right)=(1,\ -2,\ 0)$

5. (1) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=2\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{a}=2(2,\ 5,\ 4t)\cdot(2t,\ 5t+3,\ 2t^2)=2(4t+25t+15+8t^3)=16t^3+58t+30$

(2) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}'=(2,\ 5,\ 4t)\cdot(t^2,\ -1,\ 3t)+(2t,\ 5t+3,\ 2t^2)\cdot(2t,\ 0,\ 3)$

$=2t^2-5+12t^2+4t^2+6t^2=24t^2-5$

(3) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}'=(2,\ 5,\ 4t)\times(t^2,\ -1,\ 3t)+(2t,\ 5t+3,\ 2t^2)\times(2t,\ 0,\ 3)$

$=(19t,\ 4t^3-6t,\ -2-5t^2)+(15t+9,\ 4t^3-6t,\ -10t^2-6t)$

$=(34t+9,\ 8t^3-12t,\ -15t^2-6t-2)$